

An abstract graphic consisting of a dark blue 3D cube with a red sphere resting on its top surface. The cube is positioned on the left side of the slide, and the sphere is centered on the top face of the cube.

Corso di Idraulica

Prof. A. Balzano

ESERCITAZIONE 9

PROFILI DI MOTO PERMANENTE

Definizioni e ipotesi di base

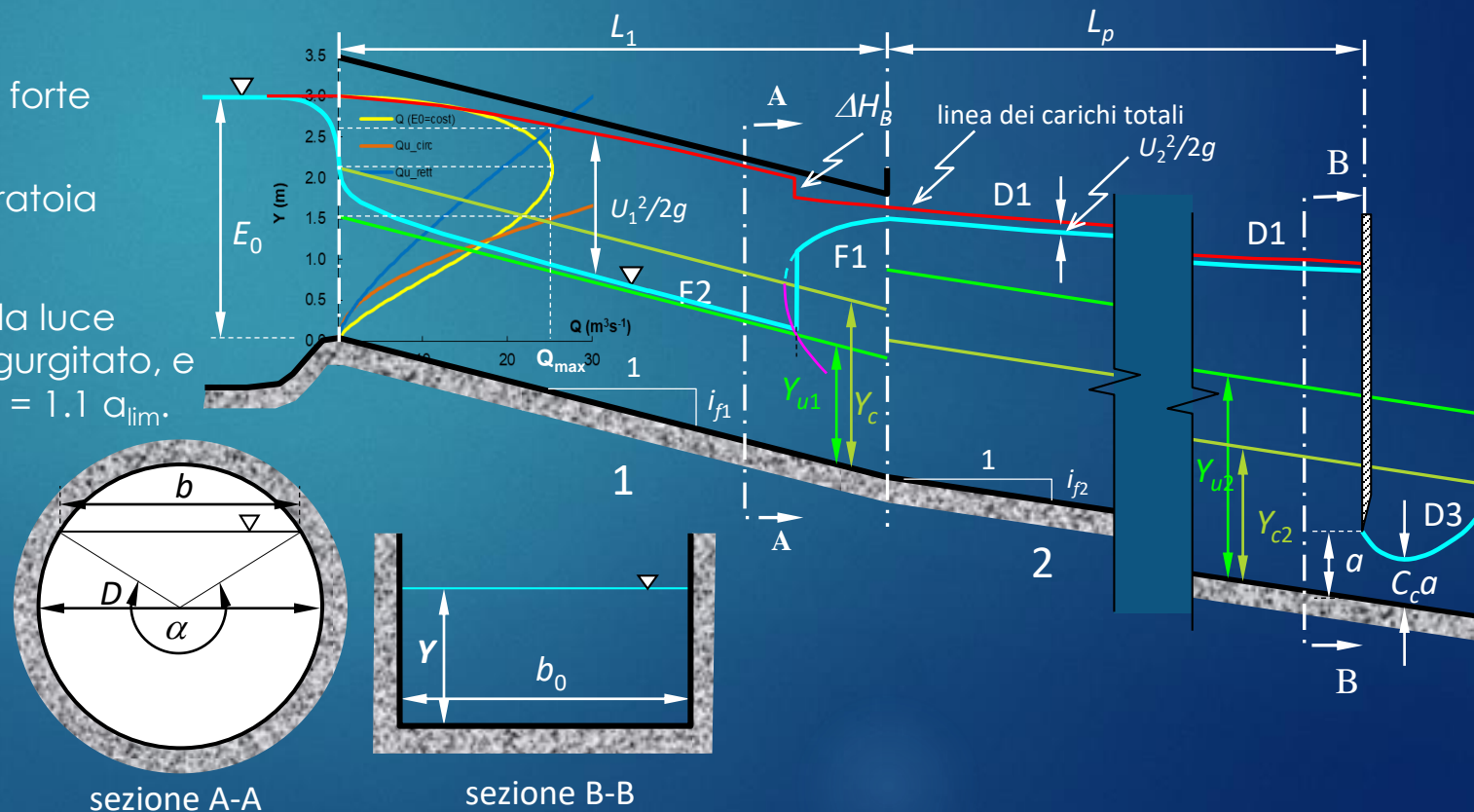
Il canale rappresentato in figura, composto da un primo tratto a sezione circolare di diametro D , lunghezza L_1 , pendenza i_{f1} e scabrezza di Strickler k_{s1} , e da un secondo tratto a sezione rettangolare di larghezza b_0 , pendenza i_{f2} e scabrezza di Strickler k_{s2} è alimentato da un serbatoio, il cui pelo libero è posto a quota E_0 rispetto al fondo del canale nella sezione di imbocco. Sul canale rettangolare, a distanza L_p dal cambio di sezione, è posta una paratoia piana, di larghezza pari alla larghezza b_0 del canale, la cui luce ha altezza a , oltre la quale il canale è indefinito verso valle.

Si richiede di:

- 1) determinare il tipo dei canali (se a debole o forte pendenza) e la portata estratta dal serbatoio;
- 2) verificare le condizioni di efflusso sotto la paratoia
- 3) tracciare i profili di moto permanente;
- 4) determinare il valore minimo dell'altezza della luce sotto la paratoia, a_{lim} , oltre il quale l'efflusso è rigurgitato, e determinare i profili di moto permanente per $a' = 1.1 a_{lim}$.

Dati:

| | | |
|--------------------------|-----------------------------------|--|
| – $D = 3.50 \text{ m}$ | – $i_{f1} = 0.01$ | – $k_{s1} = 75 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ |
| – $b_0 = 3.50 \text{ m}$ | – $i_{f2} = 0.002$ | – $k_{s2} = 60 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ |
| – $E_0 = 3.0 \text{ m}$ | – $\mu = 0.6$ | – $a = 1.5 \text{ m}$ |
| – $L_1 = 300 \text{ m}$ | – $\gamma = 9806 \text{ Nm}^{-3}$ | – $C_c = 0.61$ |
| – $L_p = 700 \text{ m}$ | | |





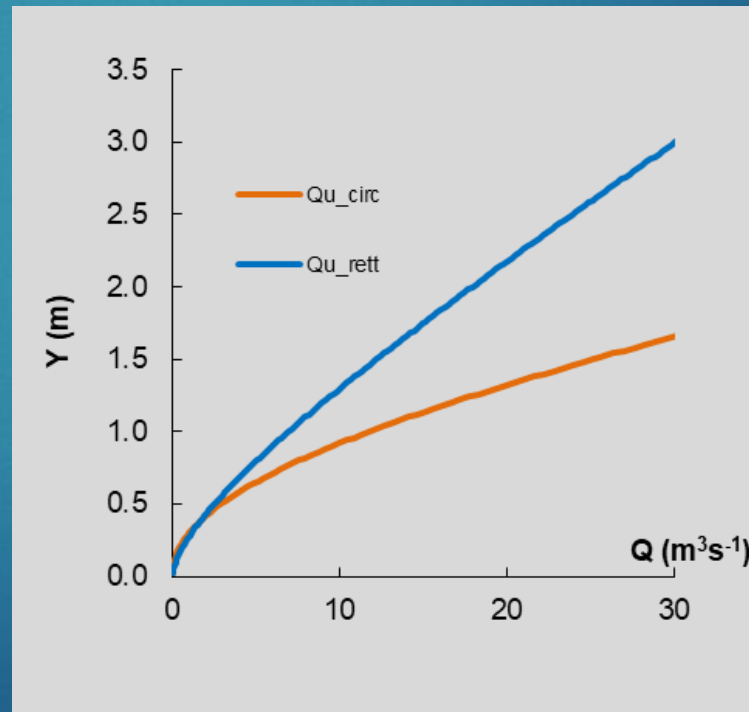
Scale delle portate di moto uniforme

► Formula di Chezy

$$j = \frac{U^2}{\chi^2 \mathfrak{R}} = i_f \longrightarrow \frac{U^2}{\chi^2 \mathfrak{R}} = \frac{Q^2}{\chi^2 \mathfrak{R} \Omega^2} = i_f \longrightarrow Q = \chi \Omega \sqrt{\mathfrak{R} i_f} \quad ; \quad \chi = k_s \mathfrak{R}^{1/6} \text{ (Strickler)}$$

• Sezione circolare

- $\alpha(Y) = 2 \arccos\left(\frac{D-2Y}{D}\right)$
- $b_1(Y) = D \sin(\alpha/2)$
- $\Omega_1(Y) = \frac{\alpha}{8} D^2 - \frac{b}{2} \left(\frac{D}{2} - Y\right)$
- $Y_{m_1}(Y) = \frac{\Omega_1}{b_1}$
- $B_1(Y) = \frac{\alpha}{2} D$
- $\mathfrak{R}_1(Y) = \frac{\Omega_1}{B_1}$
- $\chi_1(Y) = k_{s1} \mathfrak{R}_1^{1/6}$
- $U_1(Y) = \chi_1 \sqrt{\mathfrak{R}_1 i_{f1}}$
- $Q_1(Y) = \chi_1 \Omega_1 \sqrt{\mathfrak{R}_1 i_{f1}}$



• Sezione rettangolare

- $b_2 = b_0 = \text{cost}$
- $\Omega_2(Y) = b Y$
- $Y_{m_2}(Y) = \frac{\Omega_2}{b_2} = Y$
- $B_2(Y) = b + 2Y$
- $\mathfrak{R}_2(Y) = \frac{\Omega_2}{B_2}$
- $\chi_2(Y) = k_{s2} \mathfrak{R}_2^{1/6}$
- $U_2(Y) = \chi_2 \sqrt{\mathfrak{R}_2 i_{f2}}$
- $Q_2(Y) = \chi_2 \Omega_2 \sqrt{\mathfrak{R}_2 i_{f2}}$



Caratterizzazione degli alvei

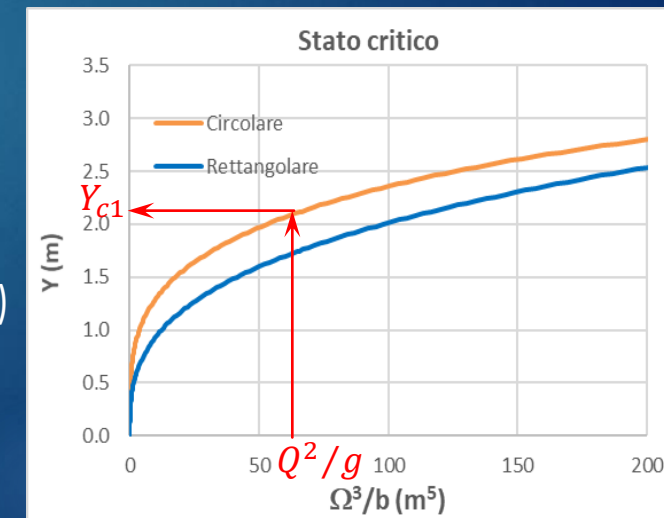
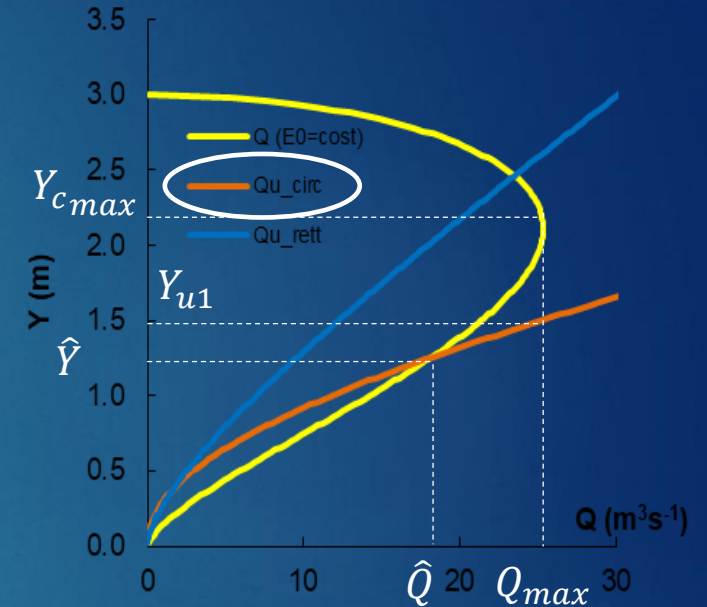
► Modalità di caratterizzazione alveo 1 e calcolo della portata

• Grafica:

- Intersezione curve $Q = \Omega_1 \sqrt{2g(E_0 - Y)}$, $Q = \chi_1 \Omega_1 \sqrt{\mathcal{R}_1 i_{f1}}$ $\longrightarrow \hat{Y}, \hat{Q}$
 - $\hat{Y} > Y_{cmax}$ $\longrightarrow i_{f1} < i_c$; in prima approssimazione $Q = \hat{Q}$; $Y_{u1} = \hat{Y}$
 Y_{c1} da grafico Ω_1^3/b_1 in corrispondenza di $\Omega_1^3/b_1 = Q^2/g$
 - $\hat{Y} < Y_{cmax}$ $\longrightarrow i_{f1} > i_c$; $Q = Q_{max}$; Y_{u1} da scala portate per $Q = Q_{max}$

• Numerica

- Determinazione di Y_{cmax}, Q_{max}
 - Soluzione di $E_0 = Y_c + \frac{1}{2}Y_{mc} \longrightarrow Y_{cmax} \longrightarrow Q_{max} = \Omega_c \sqrt{gY_{mc}}$
- $Y_{u1}(Q_{max}) \geq Y_{cmax} \longrightarrow i_f \leq i_c$
 - $Y_{u1}(Q_{max}) > Y_{cmax} \longrightarrow i_f < i_c$;
 Y_{u1} da soluzione $\Omega_1 \sqrt{2g(E_0 - Y)} = \chi_1 \Omega_1 \sqrt{\mathcal{R}_1 i_{f1}}$; $Q = \chi_1 \Omega_1 \sqrt{\mathcal{R}_1 i_{f1}}$ (Y_{u1} , Q 1ª app.)
 Y_{c1} da soluzione $Q^2/g = \Omega_1^3/b_1$
 - $Y_{u1}(Q_{max}) < Y_{cmax} \longrightarrow i_f > i_c \longrightarrow Q = Q_{max}$; $Y_{c1} = Y_{cmax}$





Caratterizzazione degli alvei

► Caratterizzazione alveo 2

- Y_{u2} da soluzione $Q = \chi_2 \Omega_2 \sqrt{\mathcal{R}_2 i_{f2}}$
- Y_{c2} da soluzione $Q^2/g = \Omega_2^3/b_2$ (esplicita per sez. rettangolare: $Y_{c2} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g b_0^2}}$)
- $Y_{u2} \geq Y_{c2} \longrightarrow i_f \leq i_c$

► Efflusso sotto la paratoia (alveo 2)

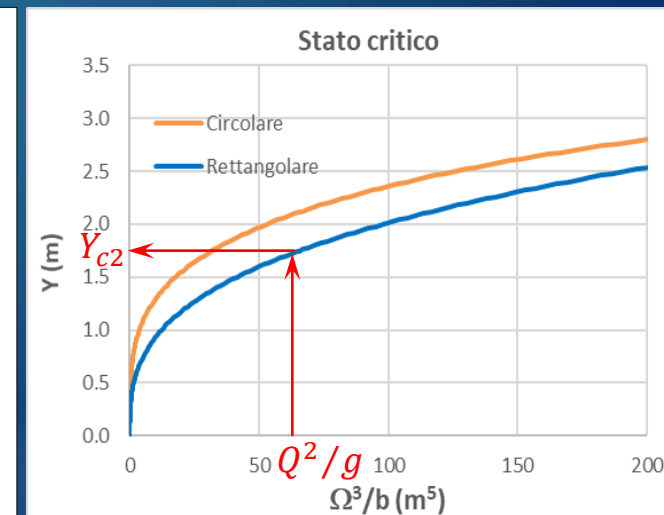
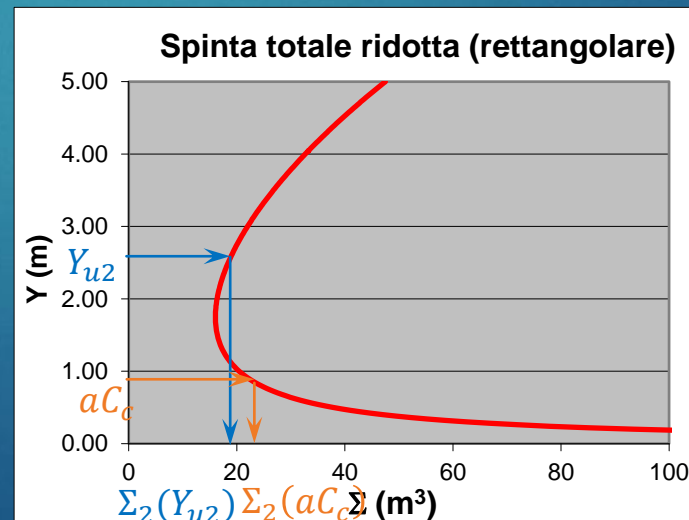
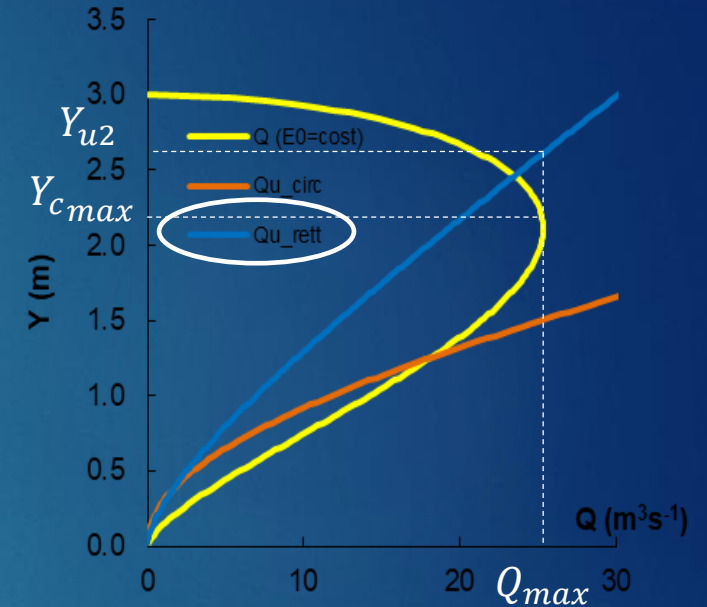
- Condizioni al contorno da valle Y_{u2} (alveo indefinito)
- Efflusso libero se $S_2(aC_c) > S_2(Y_{u2})$

$$S = p_G \Omega + \rho U^2 \Omega = \gamma \zeta_G \Omega + \rho \frac{Q^2}{\Omega} = S(Y)$$

(spinta totale)

✓ Utilizzabile anche spinta totale ridotta

$$\Sigma = \frac{S}{\gamma} = \zeta_G \Omega + \frac{1}{g} \frac{Q^2}{\Omega} = \frac{1}{2} b_0 Y^2 + \frac{Q^2}{g b_0 Y}$$



Efflusso sotto la paratoia

► Efflusso sotto la paratoia (alveo 2)

- Condizioni al contorno da valle Y_{u2} (alveo indefinito)
- Efflusso libero se $\Sigma_2(aC_c) > \Sigma_2(Y_{u2})$

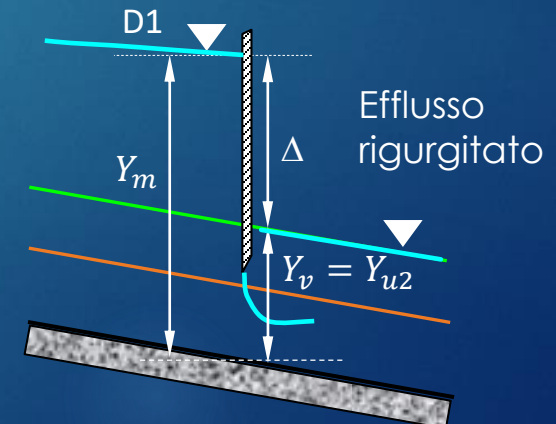
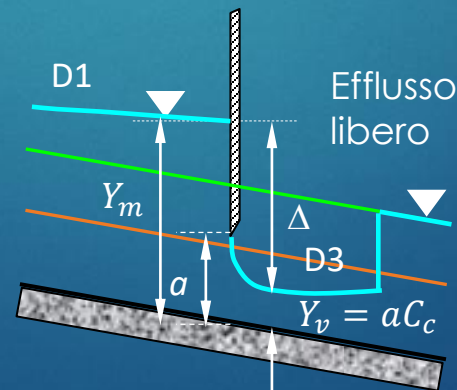
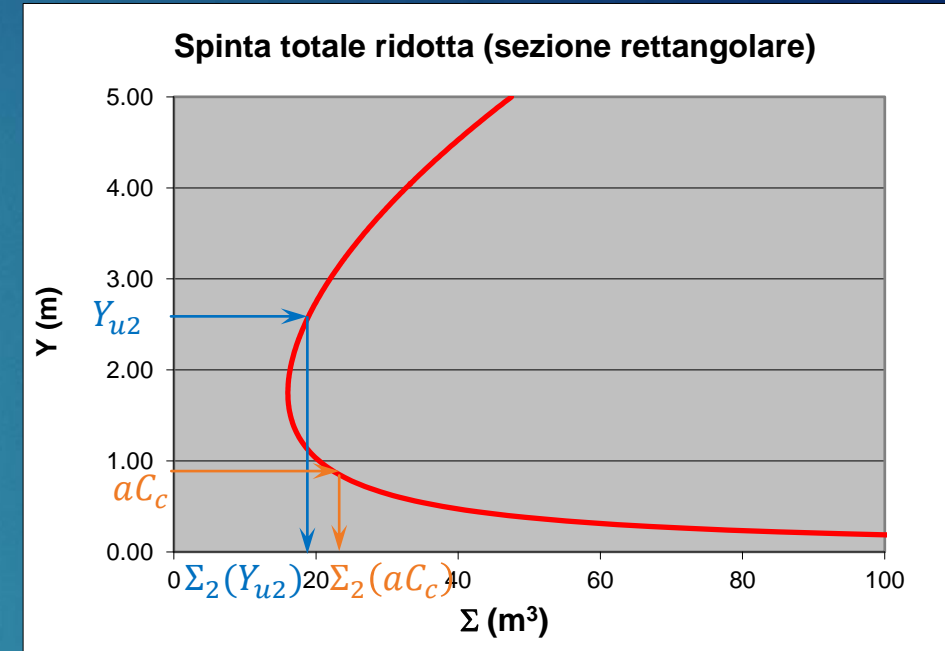
$$\Sigma = \frac{S}{\gamma} = \zeta_G \Omega + \frac{1}{g} \frac{Q^2}{\Omega} = \frac{1}{2} b_0 Y^2 + \frac{Q^2}{g b_0 Y}$$

- Determinazione della profondità Y_m a monte della paratoia
 - Efflusso libero ($Y_v = a C_c$)

Soluzione della $Q = b_0 \sqrt{\frac{2g(Y_m - a C_c)}{\frac{1}{(\mu a)^2} - \frac{1}{Y_m^2}}}$

- Efflusso rigurgitato ($Y_v = Y_{u2}$)

Soluzione della $Q = b_0 \sqrt{\frac{2g(Y_m - Y_{u2})}{\frac{1}{(\mu a)^2} - \frac{1}{Y_m^2}}}$



► Integrazione numerica dell'equazione del profilo

- $j_{m_k} = \frac{1}{2}(j_k + j_{k-1})$; $j_k = j(Y_k)$

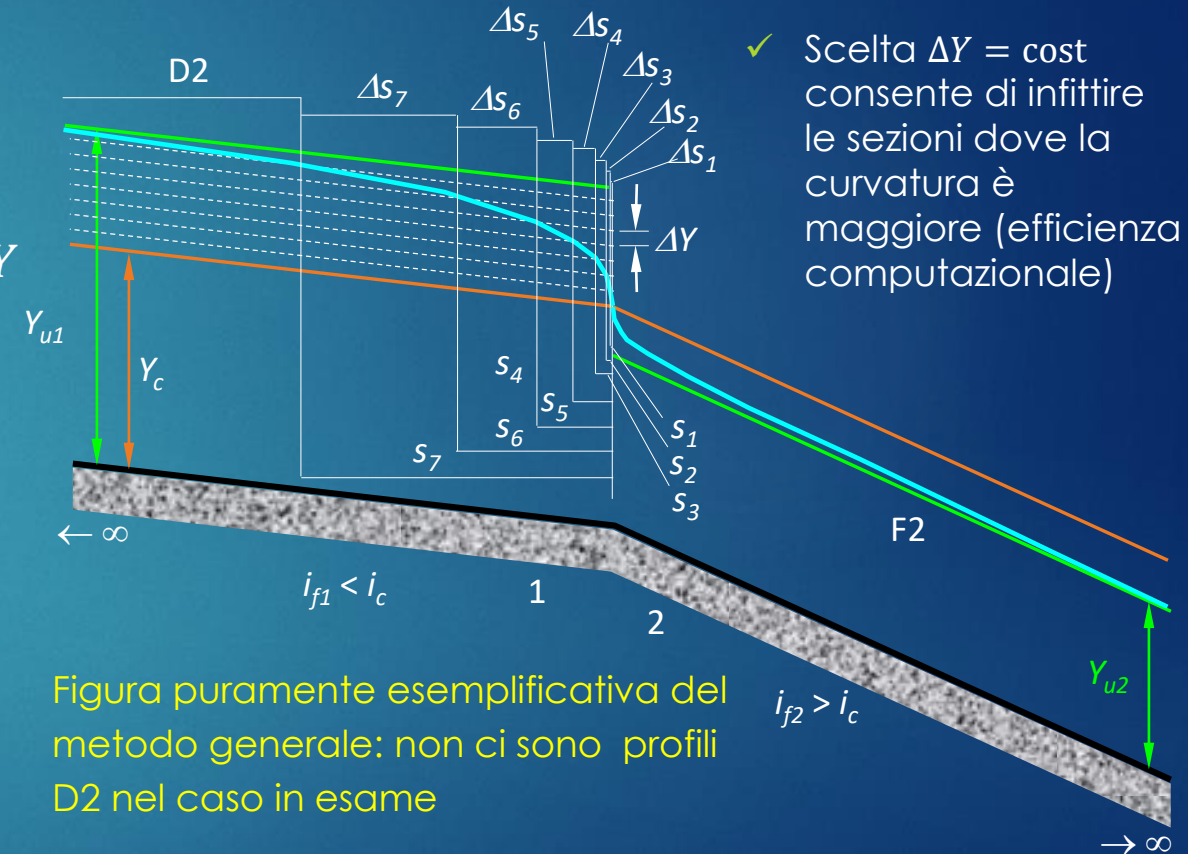


Figura puramente esemplificativa del metodo generale: non ci sono profili D2 nel caso in esame



Tracciamento dei profili di corrente

► Integrazione numerica dell'equazione del profilo

$$\bullet \quad \Delta s_k = \frac{\Delta E_k}{i_f - j_{m_k}} \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, K \quad ; \quad Y_k = Y(s_k) = Y_0 + k\Delta Y \quad ; \quad \Delta Y = \frac{Y_K - Y_0}{K} \quad ; \quad \Delta E_k = E_k - E_{k-1} \quad ; \quad E_k = Y_k + \frac{Q^2}{2g\Omega_k^2}$$

$$\Omega_k = \Omega(Y_k) \quad ; \quad j_{m_k} = \frac{Q^2}{\chi_{m_k}^2 \Re_{m_k} \Omega_{m_k}^2} \quad ; \quad \vartheta_{m_k} = \frac{1}{2}(\vartheta_k + \vartheta_{k-1}) \quad ; \quad \vartheta_k = \chi(Y_k), \Re(Y_k), \Omega(Y_k)$$

• Condizioni al contorno

– Alveo 1 (circolare)

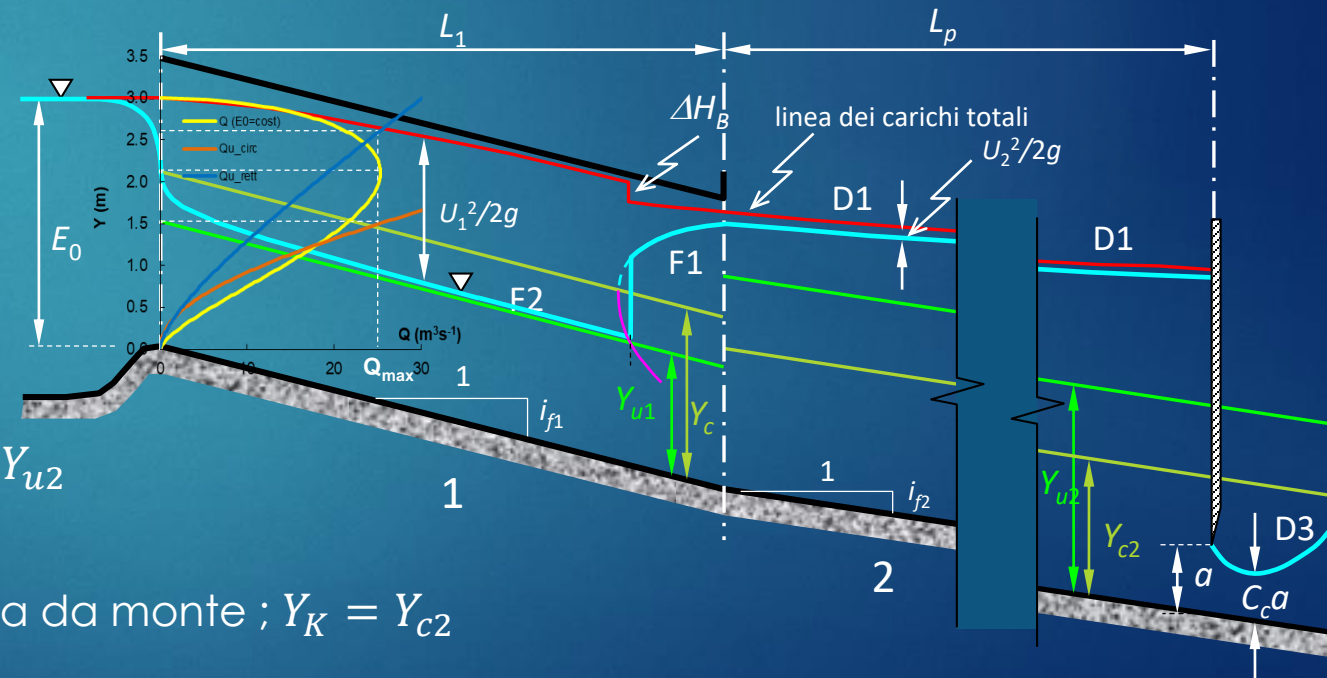
- F2: $Y_0 = Y_{c1}$ da monte ; $Y_K = Y_{u1}$
- F1: $Y_0 = Y_{D1}$ da valle ; $Y_K = Y_{c1}$

– Alveo 2 (rettangolare)

- D1: $Y_0 = Y_m$ paratoia da valle ; $Y_K = Y_{u2}$
- D3: $Y_0 = Y_{F2}$ da monte ; $Y_K = Y_{c2}$
- D3: $Y_0 = aC_c$ sezione contratta paratoia da monte ; $Y_K = Y_{c2}$

✓ Quale fra l'**F1** e il **D3** si verifichi dipende dal confronto fra $\Sigma_1(Y_{F2})$ e $\Sigma_2(Y_{D1})$ sul cambio di pendenza:

$\Sigma_1(Y_{F2}) > \Sigma_2(Y_{D1}) \longrightarrow$ risalto a valle ; $\Sigma_1(Y_{F2}) < \Sigma_2(Y_{D1}) \longrightarrow$ risalto a monte





Efflusso rigurgitato sotto la paratoia

► Efflusso rigurgitato sotto la paratoia (alveo 2)

- Condizioni al contorno da valle Y_{u2} (alveo indefinito)
- Efflusso libero se $\Sigma_2(aC_c) > \Sigma_2(Y_{u2})$

$$\Sigma_2 = \frac{1}{2}b_0Y^2 + \frac{Q^2}{gb_0Y}$$

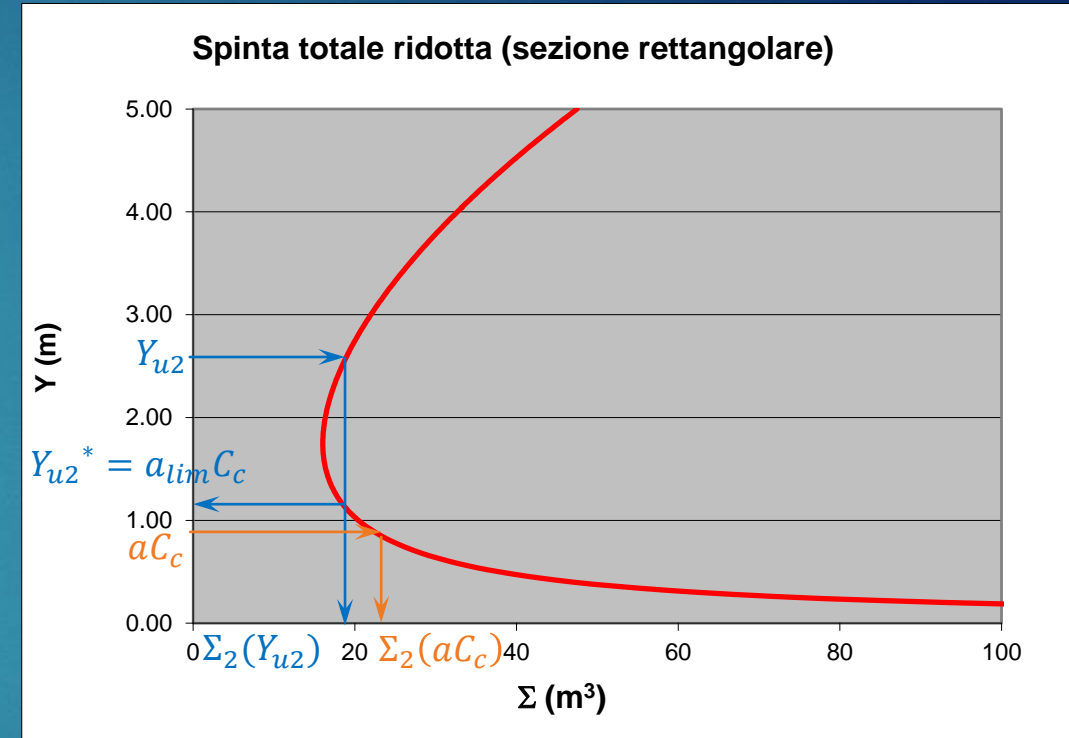
- Condizioni limite (risalto su sezione contratta)
 - $\Sigma_2(a_{lim}C_c) = \Sigma_2(Y_{u2})$ ($a_{lim}C_c = Y_{u2}^*$)

$$\frac{1}{2}b_0Y_{u2}^{*2} + \frac{Q^2}{gb_0Y_{u2}^*} = \frac{1}{2}b_0Y_{u2}^2 + \frac{Q^2}{gb_0Y_{u2}}$$

da risolvere numericamente

- ✓ Nel solutore, specificare un valore di primo tentativo di Y_u^* di corrente veloce; in caso contrario, il solutore restituirà la Y_{u2}

- Efflusso rigurgitato per $a = 1,1 a_{lim}$: profondità Y_m a monte paratoia da soluzione di $Q = b_0 \sqrt{\frac{2g(Y_m - Y_{u2})}{\frac{1}{(\mu 1,1 a_{lim})^2} - \frac{1}{Y_m^2}}}$
 - Nuovo tracciamento profili



Tracciamento dei profili di corrente

